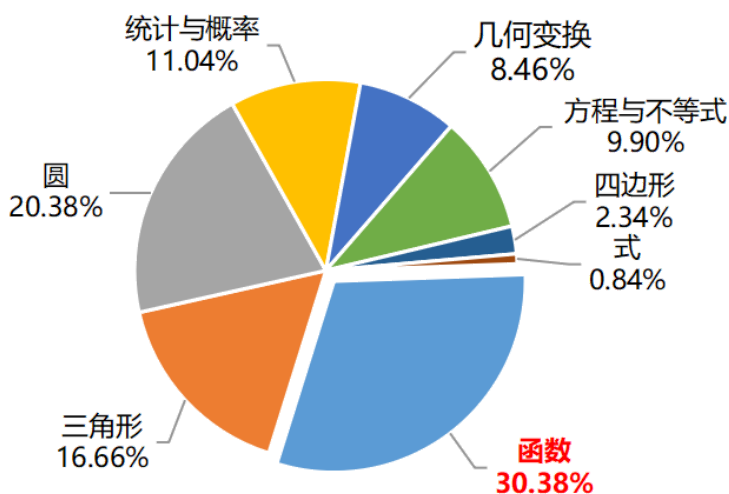


第1讲 二次函数区间最值问题

二次函数是人教版教材第二十二章的内容，在了解二次函数性质的基础上，还会与我们之前所学的代数及几何进行综合。本模块为《二次函数最值问题》，分类二次函数代数最值与几何最值两大类，重点涉及二次函数的性质与最短路径问题结合。

本模块难度较大，需要将二次函数的性质进行综合应用，本模块分为二次函数区间最值问题、二次函数之线段、面积问题、二次函数之将军饮马、胡不归问题3讲内容，加油站与讲义内容完全对照。

知己知彼



知识点	难度	考频
二次函数区间最值问题	★★★★★	中
二次函数单线段最值问题	★★★	中
二次函数面积最值问题	★★★★★	高
二次函数由面积求坐标问题	★★★★★	中
二次函数将军饮马问题	★★★★★	中
二次函数胡不归问题	★★★★★	中

知识回顾：

对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，当 x 的取值范围为全体实数时，当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时，函数有最值为 $\frac{4ac - b^2}{4a}$ 。

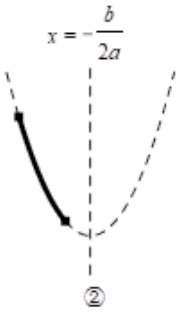
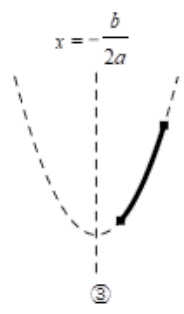
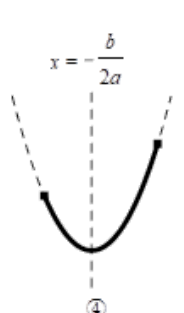
思考：

如将上述自变量取值范围改为“ $m \leq x \leq n$ ”，函数最值又该如何取得。

【思路点拨】

我们以 $a > 0$ 为例：

对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ ($y_{\max}$ 表示 y 的最大值, $y_{\min}$ 表示 y 的最小值)

图象	自变量取值范围	最小值	最大值
 ①	全体实数	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, 取到最值.	<u>无</u>
 ②	$m \leq x \leq n < -\frac{b}{2a}$	当 $x = \underline{n}$, $y = y_{\min}$	当 $x = \underline{m}$, $y = y_{\max}$
 ③	$-\frac{b}{2a} < m \leq x \leq n$	当 $x = \underline{m}$, $y = y_{\min}$	当 $x = \underline{n}$, $y = y_{\max}$
 ④	$m \leq x \leq n$	当 $x = -\frac{b}{2a}$, $y = y_{\min}$	$\textcircled{1} n + \frac{b}{2a} > \underline{\hspace{2cm}},$ 当 $x = \underline{n}$ 时, $y = y_{\max}$ $\textcircled{2} n + \frac{b}{2a} < \underline{\hspace{2cm}},$ 当 $x = \underline{m}$ 时, $y = y_{\max}$

! 总结：

对于二次函数区间最值问题，实质上就是讨论 对称轴 与 区间 的 位置 关系。

【备注】二次函数区间最值这部分，无论是哪种题型，解题时最重要的都是讨论区间与对称轴的位置关系，分为区间在对称轴左侧、对称轴在区间中间及区间在对称轴右侧；同时也要注意好函数的开口方向；表格中的第4部分，利用的是：开口向上，离对称轴越远函数值越大，因此比较到对称轴的距离即可；

此外这部分还可利用区间中点与对称轴比较，同样也以 $a > 0$ 为例，

①当 $\frac{m+n}{2} > -\frac{b}{2a}$ 时，此时当 $x = n$ 时，有 y_{max} ；

②当 $\frac{m+n}{2} < -\frac{b}{2a}$ 时，此时当 $x = m$ 时，有 y_{max} 。

这部分讲解后可以再提问学生 $a < 0$ 时，最值应该如何取得

一、定轴定区间

 举个“栗子”

 栗子1

1. 在平面直角坐标系中，二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示，与 x 轴的交点分别为 $(-3, 0)$ 、 $(1, 0)$ ，且函数与 y 轴交点在 $(0, -1)$ 的下方，结合图象给出下列结论：

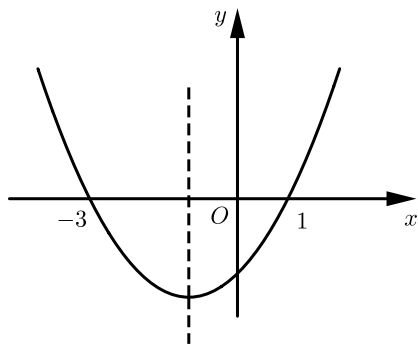
① $abc < 0$ ；

② $b^2 - 4ac < 4a$ ；

③当 $-2 \leq x \leq 3$ 时， y 的取值范围是 $-\frac{3}{2}b \leq y \leq 6b$ ；

④ $5a - b + 2c < -1$ ，

其中，正确的结论是（ ）。



A. ①②

B. ①③

C. ①④

D. ③④

【备注】③的解析中给出的含有 a 的范围，可以进一步进行计算，这时可以利用韦达定理推出 a 、 b 、 c 之间的等量关系： $-\frac{b}{a} = -3 + 1$ ，即 $a = \frac{1}{2}b$ ； $\frac{c}{a} = -3$ ，即 $c = -3a = -\frac{3}{2}b$ ，则 $-2b \leq y \leq 6b$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与轴的交点分别 $(-3, 0)$, $(1, 0)$,

且函数与 y 轴交点在 $(0, -1)$ 的下方,

$\therefore$ 开口向上, 对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-3+1}{2} = -1, c < 0$,

$\therefore a > 0, b = 2a > 0$,

$\therefore abc < 0$, 故①正确;

$\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = -1$, 函数与 y 轴交点在 $(0, -1)$ 的下方,

$\therefore \frac{4ac - b^2}{4a} < -1$,

$\therefore b^2 - 4ac > 4a$, 故②错误;

$\because$ 二次函数的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = -1$,

$\therefore$ 抛物线的最小值为 $y = a - b + c, b = 2a$,

$\therefore$ 最小值为 $y = -\frac{1}{2}b + c$,

当 $-2 \leq x \leq 3$ 时, $x = 3$ 时取最大值为 $y = 9a + 3b + c$,

即 $y = \frac{9}{2}b + 3b + c = \frac{15}{2}b + c$,

$\therefore$ 当 $-2 \leq x \leq 3$ 时, y 的取值范围是 $-\frac{1}{2}b + c \leq y \leq \frac{15}{2}b + c$,

故③错误;

$\because$ 二次函数的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = -1$,

函数与 y 轴交点在 $(0, -1)$ 的下方,

$\therefore$ 当 $x = -2$ 时, $y < -1$, 即 $4a - 2b + c < -1$,

$\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与轴的交点分别 $(-3, 0)$, $(1, 0)$,

$\therefore a + b + c = 0$,

$\therefore 5a - b + 2c < -1$, 故④正确.

故选: C.

【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

栗子2

2. 求函数 $y = 2x^2 - x + 1$ 在给定区间内的最大值和最小值.

(1) 若 $1 \leq x \leq 2$, 求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值.

(2) 若 $0 \leq x \leq 1$, 求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值.

(3) 若 $-2 \leq x \leq 0$, 求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值.

【答案】(1) 最大值为7, 最小值为2; (2) 最小值为 $\frac{7}{8}$, 最大值为2; (3) 最大值为11, 最小值

为1

【解析】(1) 由图像可知：当 $1 \leq x \leq 2$ 时，函数 $y = 2x^2 - x + 1$ 单调递增，

当 $x = 1$ 时， y 最小，且 $y = 2 \times 1 - 1 + 1 = 2$ ，

当 $x = 2$ 时， y 最大，且 $y = 2 \times 2^2 - 2 + 1 = 7$ 。

(2) 由图像可知：当 $0 \leq x \leq 1$ 时，函数 $y = 2x^2 - x + 1$ 是先减后增，

$\therefore$ 当 $x = \frac{1}{4}$ ， y 最小，且 $y = \frac{7}{8}$ 。

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时， $y = 2 \times 0 - 0 + 1 = 1$ ，当 $x = 1$ 时， $y = 2 \times 1 - 1 + 1 = 2 > 1$ ，

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时， y 最大，且 $y = 2$ 。

(3) 由函数图像开口向上，且 $-2 \leq x \leq 0 < \frac{1}{4}$ ，故当 $x = -2$ 时， y 取最大值为11，当 $x = 0$ 时， y 取最小值为1。

【标注】【题型】二次函数给定范围求最值

独步天下1

3. 已知点 $A(t, 1)$ 为函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b 为常数，且 $a \neq 0$) 与 $y = x$ 图象的交点。

(1) 求 t 。

(2) 若函数 $y = ax^2 + bx + 4$ 的图象与 x 轴只有一个交点，求 a, b 。

(3) 若 $1 \leq a \leq 2$ ，设当 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 时，函数 $y = ax^2 + bx + 4$ 的最大值为 m ，最小值为 n ，求 $m - n$ 的最小值。

【答案】(1) $t = 1$ 。

(2) $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 9 \\ b = -12 \end{cases}$ 。

(3) $\frac{9}{8}$ 。

【解析】(1) 把 $A(t, 1)$ 代入 $y = x$ 得 $t = 1$ 。

(2) $\because y = ax^2 + bx + 4$ 的图象与 x 轴只有一个交点，

$$\begin{aligned} &\therefore \begin{cases} a + b + 4 = 1 \\ \Delta = b^2 - 16a = 0 \end{cases} \\ &\therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 9 \\ b = -12 \end{cases} \end{aligned}$$

(3) 把 $A(1, 1)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 4$ 得， $b = -3 - a$ ，

$$\begin{aligned} &\therefore y = ax^2 - (a + 3)x + 4 \\ &= a \left(x - \frac{a + 3}{2a} \right)^2 - \frac{a}{4} - \frac{9}{4a} + \frac{5}{2}, \\ &\therefore \text{对称轴为直线 } x = \frac{a + 3}{2a}, \end{aligned}$$

$\therefore 1 \leq a \leq 2$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore \frac{5}{4} \leq \frac{a+3}{2a} \leq 2, \\
&\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \\
&\therefore \text{当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, } y = ax^2 + bx + 4 \text{ 的最大值为 } m = -\frac{a}{4} + \frac{5}{2}, \\
&\text{当 } x = \frac{a+3}{2a} \text{ 时, } n = -\frac{a}{4} - \frac{9}{4a} + \frac{5}{2}, \\
&\therefore m - n = \frac{9}{4a}, \\
&\therefore 1 \leq a \leq 2, \\
&\therefore \text{当 } a = 2 \text{ 时, } m - n \text{ 的值最小,} \\
&\text{即 } m - n \text{ 的最小值 } \frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】一次函数与一元一次方程

【知识点】二次函数与坐标轴交点

二、定轴动区间

栗子3

4. 已知抛物线 $C: y = x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 且关于直线 $x = 1$ 对称, 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$.
- (1) 求抛物线 C 的解析式和顶点坐标.
- (2) 将抛物线 C 绕点 O 顺时针旋转 180° 得抛物线 C' , 且有点 $P(m, t)$ 既在抛物线 C 上, 也在抛物线 C' 上, 求 m 的值.
- (3) 当 $a \leq x \leq a + 1$ 时, 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的最小值为 $2a$, 求 a 的值.

【答案】(1) $y = x^2 - 2x - 3$, $(1, -4)$.

(2) $m_1 = \sqrt{3}$, $m_2 = -\sqrt{3}$.

(3) $a = 1 - \sqrt{5}$ 或 $a = 2 + \sqrt{7}$.

【解析】(1) $\because$ 点 $A(-1, 0)$ 与点 B 关于直线 $x = 1$ 对称,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3, 0)$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = (x + 1)(x - 3)$,

$\therefore y = (x + 1)(x - 3)$

$= x^2 - 2x - 3$,

$\therefore$ 抛物线 C 的表达式为 $y = x^2 - 2x - 3$,

$\therefore y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$,

∴顶点坐标为(1, -4) .

故答案为： $y = x^2 - 2x - 3$, (1, -4) .

(2) 由抛物线 C 解析式知 $B(3, 0)$, $A(-1, 0)$,

∴点 A , 点 B 关于原点的对称点为(1, 0)和(-3, 0)都在抛物线 C' 上 ,

且抛物线 C' 开口向下 , 形状与抛物线 C 相同 ,

∴抛物线 C' 的解析式为 $y = -(x - 1)(x + 3)$,

即 $y = -x^2 - 2x + 3$,

∴点 $P(m, t)$ 在抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 上 ,

∴ $t = m^2 - 2m - 3$,

又∴ $P(m, t)$ 也在抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ 上 ,

∴ $t = -m^2 - 2m + 3$,

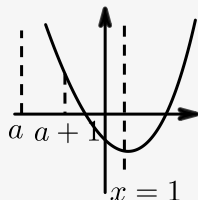
∴ $m^2 - 2m - 3 = -m^2 - 2m + 3$,

解得 $m_1 = \sqrt{3}$, $m_2 = -\sqrt{3}$.

故答案为： $m_1 = \sqrt{3}$, $m_2 = -\sqrt{3}$.

(3) $y = x^2 - 2x - 3$ 对称轴为直线 $x = 1$,

①当 $a + 1 < 1$ 即 $a < 0$ 时 , 如图 :



当 $a \leq x \leq a + 1$ 时 ,

y 随 x 的增大而减小 ,

当 $x = a + 1$ 时 , y 有最小值 $2a$,

代入 $(a + 1)^2 - 2(a + 1) - 3 = 2a$,

$a^2 + 2a + 1 - 2a - 2 - 3 = 2a$,

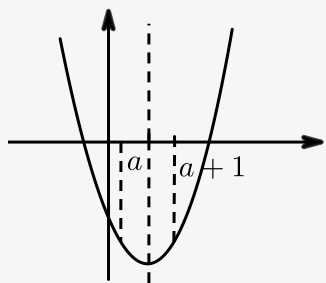
$a^2 - 2a - 4 = 0$,

$a_1 = 1 + \sqrt{5}$, $a_2 = 1 - \sqrt{5}$,

∴ $a < 0$,

∴ $a = 1 - \sqrt{5}$,

②当 $a \leq 1 \leq a + 1$ 时 , 即 $0 \leq a \leq 1$ 时 , 如图 ,



当 $x = 1$ 时, y 有最小值,

代入 $1 - 2 - 3 = 2a$,

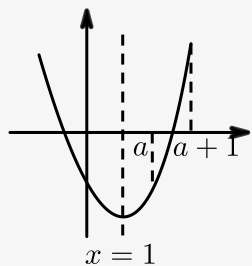
$$-4 = 2a,$$

$$a = -2,$$

$$\because 0 \leq a \leq 1,$$

$\therefore a = -2$ 舍去,

③ 当 $a > 1$ 时,



当 $a \leq x \leq a + 1$, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x = a$ 时, y 有最小值 $2a$,

代入 $a^2 - 2a - 3 = 2a$,

$$a^2 - 4a - 3 = 0,$$

$$a_1 = 2 + \sqrt{7}, a_2 = 2 - \sqrt{7},$$

$$\because a > 1,$$

$$\therefore a = 2 + \sqrt{7},$$

综上 $a = 1 - \sqrt{5}$ 或 $a = 2 + \sqrt{7}$.

【标注】【知识点】二次函数一般式

【知识点】二次函数图象关于原点对称

【思想】分类讨论思想

栗子4

5. 二次函数 $y = -(x - 1)^2 + 5$, 当 $m \leq x \leq n$ 且 $mn < 0$, y 的最小值为 $2m$, 最大值为 $2n$, 则 $m + n$ 的值为 () .

A. $\frac{5}{2}$

B. 2

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

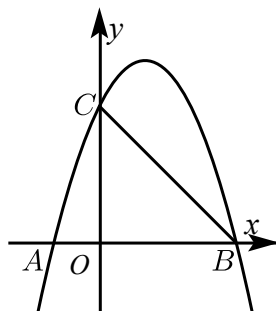
【答案】 D

【解析】 由题意可知： $m < 0, n > 0$ ；由二次函数解析式可知：该二次函数的图象开口向下，对称轴为 $x = 1$ ，顶点坐标为 $(1, 5)$ ．①当 $m \leq 0 \leq x \leq n < 1$ 时，二次函数的值 y 随 x 的增大而增大，所以当 $x = m$ 时 y 取最小值，即 $2m = -(m-1)^2 + 5$ ，整理得 $m^2 - 4 = 0$ ，解得 $m = 2$ （舍去）或 $m = -2$ ，当 $x = n$ 时， y 取得最大值，即 $2n = -(n-1)^2 + 5$ ，整理得，解得 $n = 2$ （舍去）或 $n = -2$ （舍去），因此该情况不符合题意．②当 $m \leq 0 \leq x \leq 1 \leq n$ 时，二次函数图象在 $(m, 1)$ 上 y 值随 x 的值的增大而增大，在 $(1, n)$ 上 y 的值随 x 的值的增大而减小，所以当 $x = 1$ 时取得最大值，即 $2n = 5$ ，则 $n = \frac{5}{2}$ ；当 $1 - m > n - 1$ ，即 $m + n < 2$ 时，在 $x = m$ 处取得最小值，即 $2m = -(m-1)^2 + 5$ ，整理得 $m^2 - 4 = 0$ ，解得 $m = 2$ （舍去）或 $m = -2$ ，此时 $m + n = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ 符合题意；当 $1 - m < n - 1$ ，即 $m + n > 2$ 时，在 $x = n$ 处取得最小值，即 $2m = -(n-1)^2 + 5$ ，将 $n = \frac{5}{2}$ 代入整理得 $2m = \frac{11}{4}$ ，解得 $m = \frac{11}{8}$ ，不符合题意舍去．综上所述， $m + n$ 的值为 $\frac{1}{2}$ ．

故本题正确答案为D．

【标注】 【题型】二次函数给定范围求最值**独步天下2**

6. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ ($a \neq 0$)与 x 轴分别交于点 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ．



(1) 求抛物线的解析式．

(2) 设点 $D(2, m)$ 在第一象限的抛物线上，连接 BC ， BD ．试问，在对称轴左侧的抛物线上是否存在一点 P ，满足 $\angle PBC = \angle DBC$ ？如果存在，请求出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由．

(3) 存在正实数 m, n ($m < n$)，当 $m \leq x \leq n$ 时，恰好满足 $\frac{m}{m+3} \leq \frac{2}{y+2} \leq \frac{n}{n+3}$ ，求 m, n 的值．

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$ ．(2) 存在， $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{9}\right)$ ．

$$(3) m = \sqrt{3}, n = 2.$$

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$ 与 x 轴, y 轴分别交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 点 C 三点.

$$\therefore \begin{cases} a - b + 3 = 0 \\ 9a + 3b + 3 = 0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 + 2x + 3.$$

$$(2) y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

$\therefore$ 点 $D(2, m)$ 在第一象限的抛物线上,

$$\therefore m = 3,$$

$$\therefore D(2, 3),$$

$$\therefore C(0, 3),$$

$$\therefore OC = OB,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ,$$

连接 CD ,

$$\therefore CD // x \text{轴},$$

$$\therefore \angle DCB = \angle OBC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle OCB,$$

在 y 轴上取点 G , 使 $CG = CD = 2$,

再延长 BG 交抛物线于点 P ,

在 $\triangle DCB$ 和 $\triangle GCB$ 中,

$$\therefore CB = CB, \angle DCB = \angle OCB, CG = CD,$$

$$\therefore \triangle DCB \cong \triangle GCB \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle DBC = \angle GBC.$$

设直线 BP 解析式为 $y_{BP} = kx + b (k \neq 0)$, 把 $G(0, 1)$, $B(3, 0)$ 代入, 得 $k = -\frac{1}{3}$, $b = 1$,

$$\therefore BP \text{ 解析式为 } y_{BP} = -\frac{1}{3}x + 1,$$

$$y_{BP} = -\frac{1}{3}x + 1, y = -x^2 + 2x + 3,$$

$$\text{当 } y = y_{BP} \text{ 时, } -\frac{1}{3}x + 1 = -x^2 + 2x + 3,$$

$$\text{解得 } x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 3 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore y = \frac{11}{9},$$

$$\therefore P\left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{9}\right).$$

$$(3) \text{ 由抛物线为 } y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

$$\therefore y \leq 4,$$

$$\therefore 0 < m < n, \text{ 当 } m \leq x \leq n \text{ 时, 恰好 } \frac{m}{m+3} \leq \frac{2}{y+2} \leq \frac{n}{n+3},$$

$$\therefore \frac{6}{n} \leq y \leq \frac{6}{m},$$

$$\therefore \frac{6}{m} \leq 4, \text{ 即 } m \geq \frac{3}{2} > 1,$$

$$\therefore 1 \leq m < n,$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴是 $x = 1$, 且开口向下,

$\therefore$ 当 $m \leq x \leq n$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x = m$ 时, $y_{\max} = -m^2 + 2m + 3$;

当 $x = n$ 时, $y_{\min} = -n^2 + 2n + 3$,

$$\text{又 } \frac{6}{n} \leq y \leq \frac{6}{m},$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{6}{n} = -n^2 + 2n + 3 \text{ ①} \\ \frac{6}{m} = -m^2 + 2m + 3 \text{ ②} \end{cases},$$

将①整理, 得 $n^3 - 2n^2 - 3n + 6 = 0$, 变形, 得 $n^2(n - 2) - 3(n - 2) = 0$,

$$\therefore (n - 2)(n^2 - 3) = 0,$$

$$\therefore n > 1,$$

$$\therefore n - 2 = 0, n^2 - 3 = 0,$$

$$\text{解得 } n_1 = 2, n_2 = -\sqrt{3} \text{ (舍去)}, n_3 = \sqrt{3},$$

同理, 由②解得 $m_1 = 2$ (舍去), $m_2 = -\sqrt{3}$ (舍去), $m_3 = \sqrt{3}$;

综上所述, $m = \sqrt{3}, n = 2$.

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

三、动轴定区间

栗子5

7. 已知二次函数 $y = (x - h)^2 + 1$ (h 为常数), 在自变量 x 的值满足 $1 \leq x \leq 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 的最小值为 5, 则 h 的值为 ().

- A. 1或-5 B. -1或5 C. 1或-3 D. 1或3

【答案】 B

【解析】 $\therefore$ 当 $x > h$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $x < h$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ ①若 $h < 1 \leq x \leq 3$, $x = 1$ 时, y 取得最小值 5,

$$\text{可得: } (1 - h)^2 + 1 = 5,$$

解得: $h = -1$ 或 $h = 3$ (舍);

②若 $1 \leq x \leq 3 < h$ ，当 $x = 3$ 时， y 取得最小值5，

可得： $(3 - h)^2 + 1 = 5$ ，

解得： $h = 5$ 或 $h = 1$ （舍）。

③若 $1 \leq h \leq 3$ ，

$\therefore x = h$ 时， t 取得最小值1，不为5，舍去。

综上， h 的值为-1或5。

【标注】【知识点】定区间动轴函数的最值问题

独步天下3

8. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = x^2 - 2(k-1)x + k^2 - \frac{5}{2}k$ （ k 为常数）。

（1）当 $k = 2$ 时，求该抛物线的解析式及顶点坐标。

（2）若抛物线经过点 $(1, k^2)$ ，求 k 的值。

（3）若抛物线经过点 $(2k, y_1)$ 和点 $(2, y_2)$ ，且 $y_1 > y_2$ ，求 k 的取值范围。

（4）若将抛物线向右平移1个单位长度得到新抛物线，当 $1 \leq x \leq 2$ 时，新抛物线对应的函数有最小值 $-\frac{3}{2}$ ，求 k 的值。

【答案】（1） $y = x^2 - 2x - 1$ ， $(1, -2)$

（2） $k = \frac{2}{3}$ 。

（3） $k > 1$ 。

（4） $k = 1$ 或 3 。

【解析】（1）当 $k = 2$ 时， $y = x^2 - 2(2-1)x + 2^2 - \frac{5}{2} \times 2 = x^2 - 2x - 1$ 。

化为顶点式为： $y = (x-1)^2 - 2$ ，

$\therefore$ 顶点坐标 $(1, -2)$ 。

（2）把点 $(1, k^2)$ 代入抛物线： $y = x^2 - 2(k-1)x + k^2 - \frac{5}{2}k$ ，

得， $k^2 = 1^2 - 2(k-1) + k^2 - \frac{5}{2}k$ ，

解得， $k = \frac{2}{3}$ 。

（3）把点 $(2k, y_1)$ 代入抛物线： $y = x^2 - 2(k-1)x + k^2 - \frac{5}{2}k$ ，

得， $y_1 = (2k)^2 - 2(k-1)2k + k^2 - \frac{5}{2}k = k^2 + \frac{3}{2}k$ ，

把点 $(2, y_2)$ 代入抛物线： $y = x^2 - 2(k-1)x + k^2 - \frac{5}{2}k$ ，

得， $y_2 = 2^2 - 2(k-1) \times 2 + k^2 - \frac{5}{2}k = k^2 - \frac{13}{2}k + 8$ ，

$\therefore y_1 > y_2$ ，

$\therefore k^2 + \frac{3}{2}k > k^2 - \frac{13}{2}k + 8$ ，

解得 $k > 1$.

(4) 抛物线 : $y = x^2 - 2(k-1)x + k^2 - \frac{5}{2}k$ 解析式配方得 ,

$$y = (x - k + 1)^2 + \left(-\frac{1}{2}k - 1\right) ,$$

将抛物线向右平移1个单位长度得到新解析式为 : $y = (x - k)^2 + \left(-\frac{1}{2}k - 1\right) ,$

当 $k < 1$ 时 , $1 \leq x \leq 2$ 对应的抛物线部分位于对称轴右侧 , y 随 x 的增大而增大 ,

$$\therefore x = 1 \text{ 时 } , y_{\text{最小}} = (1 - k)^2 - \frac{1}{2}k - 1 = k^2 - \frac{5}{2}k ,$$

$$\therefore k^2 - \frac{5}{2}k = -\frac{3}{2} , \text{ 解得 } k_1 = 1 , k_2 = \frac{3}{2} , \text{ 都不合题意 , 舍去 ;}$$

$$\text{当 } 1 \leq k \leq 2 \text{ 时 } , y_{\text{最小}} = -\frac{1}{2}k - 1 ,$$

$$\therefore -\frac{1}{2}k - 1 = -\frac{3}{2} ,$$

解得 $k = 1$;

当 $k > 2$ 时 , $1 \leq x \leq 2$ 对应的抛物线部分位于对称轴左侧 , y 随 x 的增大而减小 ,

$$\therefore x = 2 \text{ 时 } ,$$

$$y_{\text{最小}} = (2 - k)^2 - \frac{1}{2}k - 1 = k^2 - \frac{9}{2}k + 3 ,$$

$$\therefore k^2 - \frac{9}{2}k + 3 = -\frac{3}{2} ,$$

$$\text{解得 } k_1 = 3 , k_2 = \frac{3}{2} \text{ (舍去)} .$$

综上 , $k = 1$ 或 3 .

【标注】【知识点】给定范围求二次函数最值

四、 动轴动区间

栗子6

9. 设 $a < -1$, $0 \leq x \leq -a - 1$, 且函数 $y = x^2 + ax$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$, 则常数 $a =$ _____ .

【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】 抛物线对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{a}{2}$,

$$\therefore a < -1 ,$$

$$\therefore -\frac{a}{2} > \frac{1}{2} ,$$

$$\text{① } -a - 1 \leq -\frac{a}{2} \text{ 即 } -2 \leq a < -1 \text{ 时 } ,$$

当 $x = -a - 1$, 函数 $y = x^2 + ax$ 有最小值 ,

$$(-a - 1)^2 + a(-a - 1) = -\frac{1}{2} ,$$

$$\text{解得 } a = -\frac{3}{2} ,$$

② $-a-1 > -\frac{a}{2}$ 即 $a < -2$ 时,
 当 $x = -\frac{a}{2}$, 函数 $y = x^2 + ax$ 有最小值,
 $(-\frac{a}{2})^2 + a(-\frac{a}{2}) = -\frac{1}{2}$,
 解得 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = -\sqrt{2}$ 均不符合题意, 舍去,
 综上所述, a 的值为 $-\frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】动轴动区间函数的最值问题

栗子7

10. 已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ (b, c 为常数).

- (1) 当 $b = 2, c = -3$ 时, 求二次函数的最小值.
- (2) 当 $c = 5$ 时, 若在函数值 $y = 1$ 的情况下, 只有一个自变量 x 的值与其对应, 求此时二次函数的解析式.
- (3) 当 $c = b^2$ 时, 若在自变量 x 的值满足 $b \leq x \leq b+3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 的最小值为 21, 求此时二次函数的解析式.

【备注】 (2) 问中, 根据 $y = 1$ 时只有一个 x 与其对应即可得到, 函数最小值为 1,
 则 $\frac{4ac - b^2}{4a} = 1$, 即 $b = \pm 4$

【答案】 (1) 当 $x = -1$ 时, 二次函数取得最小值 -4.

(2) $y = x^2 + 4x + 5$ 或 $y = x^2 - 4x + 5$.

(3) $y = x^2 + \sqrt{7}x + 7$ 或 $y = x^2 - 4x + 16$.

【解析】 (1) 当 $b = 2, c = -3$ 时, 二次函数的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$, 即 $y = (x+1)^2 - 4$.

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, 二次函数取得最小值 -4.

(2) 当 $c = 5$ 时, 二次函数的解析式为 $y = x^2 + bx + 5$.

由题意, 得方程 $x^2 + bx + 5 = 1$ 有两个相等的实数根,

有 $\Delta = b^2 - 16 = 0$, 解得 $b_1 = 4, b_2 = -4$.

$\therefore$ 此时二次函数的解析式为 $y = x^2 + 4x + 5$ 或 $y = x^2 - 4x + 5$.

(3) 当 $c = b^2$ 时, 二次函数的解析式为 $y = x^2 + bx + b^2$.

它的图象是开口向上, 对称轴为 $x = -\frac{b}{2}$ 的抛物线.

① 若 $-\frac{b}{2} < b$, 即 $b > 0$,

在自变量 x 的值满足 $b \leq x \leq b+3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 随 x 的增大而增大,

故当 $x = b$ 时, $y = b^2 + b \cdot b + b^2 = 3b^2$ 为最小值.

$\therefore 3b^2 = 21$, 解得 $b_1 = -\sqrt{7}$ (舍), $b_2 = \sqrt{7}$.

②若 $b \leq -\frac{b}{2} \leq b+3$ ，即 $-2 \leq b \leq 0$ ，

当 $x = -\frac{b}{2}$ 时， $y = (-\frac{b}{2})^2 + b \cdot (-\frac{b}{2}) + b^2 = \frac{3}{4}b^2$ 为最小值．

$\therefore \frac{3}{4}b^2 = 21$ ，解得 $b_3 = -2\sqrt{7}$ （舍）， $b_4 = 2\sqrt{7}$ （舍）．

③若 $-\frac{b}{2} > b+3$ ，即 $b < -2$ ，

在自变量 x 的值满足 $b \leq x \leq b+3$ 的情况下，与其对应的函数值 y 随 x 的增大而减小，

故当 $x = b+3$ 时， $y = (b+3)^2 + b(b+3) + b^2 = 3b^2 + 9b + 9$ 为最小值．

$\therefore 3b^2 + 9b + 9 = 21$ ，即 $b^2 + 3b - 4 = 0$ ．解得 $b_5 = 1$ （舍）， $b_6 = -4$ ．

综上所述， $b = \sqrt{7}$ 或 $b = -4$ ．

$\therefore$ 此时二次函数的解析式为 $y = x^2 + \sqrt{7}x + 7$ 或 $y = x^2 - 4x + 16$ ．

【标注】【知识点】二次函数一般式

【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

【知识点】一元二次方程根的判别式

【能力】运算能力

【思想】分类讨论思想